Математическая олимпиада школьников (ноябрь 2018г.)

7-й класс

7.1 У любящей задавать загадки Маши на два шарика больше, чем у чтеца стихов Оли. У гимнастки Кати шариков столько же, сколько у Маши и Оли, вместе взятых, но вдвое меньше, чем у биолога Вали. Всего у них четверых имеется 64 шарика. Сколько у кого шариков?

7.2 Саша и Ваня родились 19 марта. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?

7.3 Учитель изготовил 50 палочек длины 1,2,…,50 см и хочет разделить их между 25 мальчиками, дав каждому по две палочки. Мальчик будет рад, если половина одной его палочки окажется длиннее другой палочки. Сможет ли учитель разделить палочки так, чтобы все мальчики порадовались?

7.4 В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 3\angle A$, и $AB = 2BC$.

Докажите, что $\angle B = 60^{o}$.

7.5 На доске написано 11 натуральных чисел. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной.

8-й класс

8.1 На острове $\frac{3}{4}$ всех мужчин женаты и $\frac{4}{5}$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

8.2 В треугольнике одна сторона в три раза меньше суммы двух других. Докажите, что противолежащий ей угол − наименьший угол треугольника.

8.3 На листе школьной тетради в клеточку некоторые из клеток закрасили. Оказалось, что в любом квадрате 3 х 3 клеточки закрашено не менее 7 клеток. Верно ли, что на этом листе найдётся квадрат 2 х 2 клеточки, все 4 клетки которого закрашены?

8.4 Пусть m и n – последовательные нечетные числа. Докажите, что выражение $7m^2 - 5n^2 - 2$ делится на 8.

8.5 По кругу расставлены 10 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы уравновесились.

9-й класс

9.1 К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 72.

9.2 ABCD – параллелограмм. K– точка, такая, что $AK = BD$. Точка M – середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90^{o}$.

9.3 У учителя математики возраст на 24 года больше среднего возраста учеников класса, где он проводит урок и на 22 года больше среднего возраста всех присутствующих в классе. Сколько в классе учеников?

9.4 В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

9.5 Квадрат простого числа *p* увеличили на 160 и получили квадрат натурального числа. Найдите *p*.

10-й класс

10.1 Число a является корнем уравнения $x^2 - x - 100 = 0$. Найдите значение $a^4 - 201a$.

10.2 Существует ли убывающая на промежутке $[0,\infty)$ функция $h(x)$, такая, что функция $f(x) = (x^2 - x + 1)h(x)$ является возрастающей на промежутке $[0,\infty)$?

10.3 В четырехугольнике три тупых угла. Докажите, что большая из двух его диагоналей выходит из вершины острого угла.

10.4 Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна сумме первых m членов той же прогрессии. Определите сумму первых членов этой же прогрессии.

10.5 В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. У каждого из них отбросили половину: левую или правую. Докажите, что оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

11-й класс

11.1 Докажите, что из двух чисел $a = |\cos x - \sin x|$, $b = |\cos x + \sin x|$ хотя бы одно не меньше 1.

11.2 Точка D находится на стороне AC треугольника ABC. При этом $\angle BDC = \angle ABC$. Биссектрисы углов ABC и BDC пересекаются в точке K. Докажите, что $AK = BK$.

11.3 На конгрессе присутствуют 200 ученых, каждый из которых знает ровно 4 языка. Известно, что из любых трех ученых какие-то двое могут говорить на одном языке. Докажите, что каким-то языком владеют не менее 26 участников конгресса.

11.4 Бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ образована по закону: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \dfrac{1}{a_n}}$ при $n = 1, 2, \ldots$. Докажите, что некоторый интервал длины 1 содержит более тысячи членов этой последовательности.

11.5 В пространстве даны 4 различных шара одинакового радиуса. Докажите, что объединение любых трех из них не содержит целиком четвертый шар.